

Ah ! les nombres premiers...
57 pintxos sur ces “incassables” de l’arithmétique

Avant-propos

Les *nombres premiers*, l'*arithmétique* ou la “*théorie des nombres*”..., peut-être de mauvais souvenirs de scolarité qui feront que vous avez une envie irrésistible de fermer immédiatement ce livret ; ne le faites-pas ! J’espère d’abord susciter votre curiosité, puis vous amener à l’intérêt, à la contemplation, à l’étonnement, enfin au plaisir que ces nombres dits premiers ne manquent pas d’occasionner.

Pintxos... ah ! cela paraît plus sympathique. Cette appellation pintxos (prononcer *pintchoss*) recouvre au Pays basque ce que par ailleurs on préfère appeler *tapas*, c’est-à-dire des petits mets qu’on consomme entre amis, accompagnés de boissons ou pas, de formats et compositions variés (viandes, poissons, légumes, etc.).

Alors je vous propose tout simplement de déguster des **pintxos sur les nombres premiers**... : des résultats bien préparés, pas difficiles à comprendre (à digérer), de contenus variés (certains seront jugés fades, d’autres bien épicés), sans démonstration mathématique (on ne vous dit pas comment les pintxos ont été préparés), à consommer en petites quantités à la fois, et on y revient (après avoir mastiqué, apprécié et avalé 3 ou 4 pintxos, on éprouve le besoin de faire une pause).

L’*arithmétique* ou la *théorie des nombres* (“*arithmétique supérieure*” en est une vieille appellation) constitue une partie des mathématiques, seulement une partie, mais certainement la plus ancienne ; c’est celle qui s’occupe des propriétés des nombres entiers et de ce qu’on peut faire avec. Une terminologie plus moderne serait sans doute la *science des nombres*. Parmi ces nombres, il y en a qui ont un statut spécial, ce sont les nombres dits *premiers*, c’est-à-dire ceux dont les seuls diviseurs sont 1 et le nombre lui-même, par exemple 2, 3, 5, 7, 11, etc. Les nombres qui ne sont pas premiers (on les appelle *composés*) sont au contraire ceux pour lesquels on a pu trouver d’autres diviseurs ; par exemple : 6 a comme diviseurs 2 et 3 (autres donc que 1 et 6 lui-même) ; 60 a “beaucoup” de diviseurs, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 (et c’est sans doute une des raisons de son succès !).

Si on pouvait refaire l’histoire et renommer les choses, on qualifierait d’**incassables** (ou d’*insécables*) les nombres qui ne peuvent être factorisés, c’est-à-dire divisés, que par les inévitables “1 et le nombre lui-même”. Les nombres incassables - on est obligé de revenir au qualificatif usuel de premiers - sont les briques ou composantes de base qui servent à la construction de tous les nombres entiers. Si on devait faire un parallèle avec d’autres domaines scientifiques, on aurait : en physique, les particules élémentaires ; en chimie, les atomes ; dans les sciences du vivant, ce serait l’ADN.

L’étude des nombres premiers (inévitables questions : combien y en a-t-il, comment on les reconnaît, à quoi servent-ils) ont fasciné les curieux depuis la nuit des temps, et pas

seulement des “professionnels” de la chose mathématique mais aussi de simples amateurs (au sens premier de ce terme : qui aiment). Et cela continue de nos jours...

Il se trouve que l’on peut appréhender et comprendre les problèmes et les propriétés des nombres premiers avec des connaissances élémentaires. C’est pour cela qu’on les rencontre très tôt dans le cursus scolaire : par exemple, dès le Collège, les écoliers savent ce qu’est un nombre premier, étudient les critères de divisibilité (que nous reprendrons dans notre texte), s’en servent pour factoriser un nombre (pas trop grand tout de même!) en produit de nombres premiers; un peu plus tard, au Lycée (mais dès la classe de Seconde), les élèves utilisent les décompositions de nombres entiers en facteurs de nombres premiers pour réduire des fractions, ils vont même jusqu’à se frotter à des calculs de PPCM (plus petit commun multiple) ou PGCD (plus grand commun diviseur). Rassurez-vous - ou lamentez-vous -, vous n’aurez pas besoin de ces notions ici, pas plus que des techniques de congruences (de la classe de Terminale). Disons que le niveau général de connaissances requis pour démarrer est celui qu’on demande pour la visite d’un musée scientifique, c’est-à-dire, celui acquis en classe de 4^{ème} de collège. Quand un résultat dépasse le niveau du baccalauréat, la sommation d’une série de nombres réels par exemple, il sera étiqueté d’une étoile ★, vous pourrez le laisser de côté en première lecture. De toute façon, les rudiments de base sur la “science des nombres” seront rappelés dans un paragraphe préliminaire.

“Quiconque aime lire les résultats de football ne peut qu’apprécier les joies des nombres premiers”

G. HARDY (1877 – 1967), mathématicien britannique qui a contribué à une meilleure connaissance des nombres.

“Any fool can ask questions about numbers, which even a thousand wise men cannot solve”

P. RIBENBOIM (en 1984), grand vulgarisateur des problèmes relatifs aux nombres.

Au cours des siècles, l’étude des nombres premiers a été motivée par essentiellement le “désir de savoir”, la curiosité..., un moteur qui fonctionne toujours. On pouvait dire que c’était l’affaire de spécialistes (en mathématiques). Mais depuis les années 1980 (il n’y a pas si longtemps donc!), à la suite de l’élaboration d’un système de cryptographie particulièrement efficace utilisant les nombres premiers, l’intérêt pour ces nombres premiers a gagné le monde du calcul informatique, par là le monde des affaires, des codes secrets, de l’espionnage même... Quand vous avez retiré de l’argent ce matin, quelque part a été utilisée une propriété des nombres premiers; quand vous avez commandé un livre sur internet hier, votre paiement a été sécurisé par un système de cryptage faisant appel aux nombres premiers; quand tout à l’heure, vous allez téléphoner sur votre téléphone mobile, votre opérateur de télécommunications va utiliser, de façon cachée certes, la factorisation ou la non-factorisation d’un grand nombre entier, etc.

La pratique des nombres premiers, par les mathématiciens professionnels ou amateurs, les a conduits à des appréciations positives de son monde comme “merveilleux”, “symphonie”, “beauté cachée”,... , ou bien négatives comme “jungle”, “monde étrange et troublant”, “mystères”, “chaos”, “guerre”,... Voir pour cela quelques titres de références à la fin du

recueil.

Quelques qualificatifs (parfois savoureux) accompagnent parfois les nombres premiers, nous n'en considérons que quelques-uns : équilibrés, palindromes, permutable (ou absolus), jumeaux, triplés, quadruplés, etc.

Alors, comment apprécier ces *pintxos* ?

D'abord lentement... : le contenu, bien que court souvent, est dense ; il mérite qu'on l'observe, le contemple, l'apprécie..., voire que l'on soit émerveillé par la puissance et la profondeur du résultat... Il y a parfois, souvent devrions-nous dire, des sommes d'énergies humaines, sur plusieurs années, pour arriver à le démontrer.

Ensuite pas trop à la fois : les items (appellation plus prosaïque de nos *pintxos* dans le texte) sont (volontairement) indépendants ; deux ou trois à la suite..., et on pourra y revenir. Comme il n'y a pas de démonstration (au sens mathématique du terme), en "avalier" trop d'un coup peut conduire à l'indigestion. Il faut prendre le temps de mastiquer, n'est-ce pas ?

Il y a une légère progression dans la difficulté de la soixantaine (57 exactement¹) de *pintxos* qui sont présentés, des regroupements sont parfois opérés.

De temps en temps, l'appréciation d'un scientifique (mathématicien ou physicien) viendra agrémente un lot de *pintxos*, comme un maître cuisinier qui donnerait son avis d'expert.

Alors, prêts ? Si oui, bon appétit ! *On egin !*

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty
Université Paul Sabatier de Toulouse
[http ://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/](http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/)

Région toulousaine et Pays basque, automne 2023.

1. 57 n'est pas un nombre premier, mais il n'est pas loin de l'être : $57 = 3 \times 19$, il n'y a donc que 2 diviseurs non triviaux de 57. De tels nombres sont parfois appelés *semi-premiers*.